

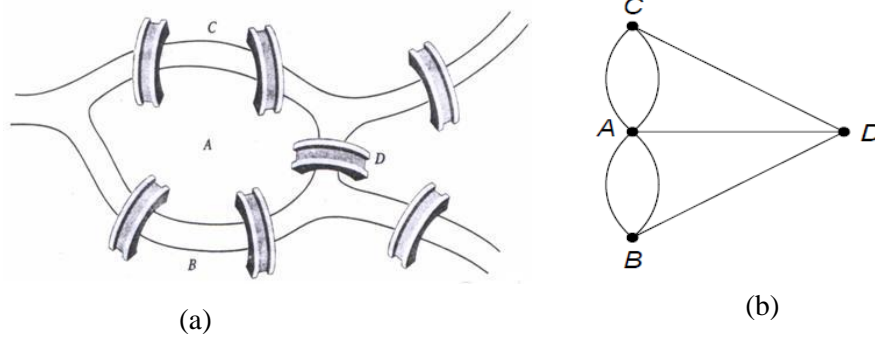
BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Sejarah Teori Graph

Penemuan teori graph bermula ketika suatu daerah di Jerman yang di lalui oleh sungai sehingga daerah tersebut terbagi menjadi 4 bagian daratan, daratan-daratan itu dihubungkan oleh 7 jembatan. Warga setempat secara tidak sengaja memikirkan bagaimana cara untuk mengelilingi kelima daerah tersebut hanya dengan melintasi setiap jembatan tepat satu kali. Akhirnya ide ini merebak ke seluruh Eropa hingga seorang ilmuwan bernama Leonard Euler turut berpartisipasi memikirkan jalan keluarnya. Menurutnya ini bukanlah suatu fantasi belaka, tapi merupakan suatu teka-teki yang perlu untuk dipecahkan. Masalah yang dikemukakan Euler : Dapatkah seseorang melewati setiap jembatan Konigsberg tepat sekali dan kembali lagi ke tempat semula?

Langkah yang diambil Euler kemudian adalah dengan memisalkan kelima daratan tersebut sebagai sebuah simpul, yaitu simpul A, B, C, dan D, serta memisalkan jembatan sebagai garis atau sisi yang menghubungkan simpul-simpul tersebut. Sehingga ilustrasi gambar yang dihasilkan Euler adalah sebagai berikut



Sumber. Kartika. Hand Out Teori Graf. 2008

Gambar 2.1

(a) Jembatan Konigsberg, (b) Graph dari Jembatan Konigsberg

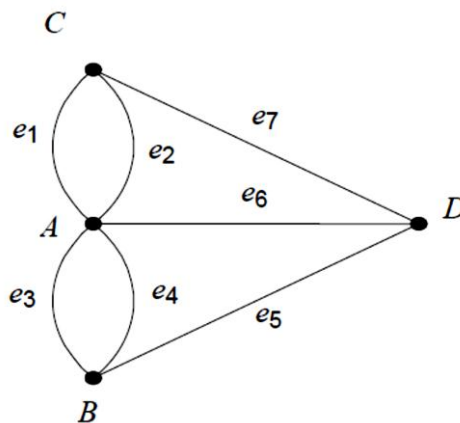
Pada Gambar 2.1 menunjukkan bahwa daerah A dilewati oleh 5 jembatan, daerah B dilewati 3 jembatan, C oleh 3 jembatan, dan D oleh 3 jembatan. Euler mengilustrasikan penampang gambar tersebut menjadi sebuah Graph sehingga jawaban pertanyaan Euler adalah tidak mungkin. Agar bisa melalui setiap jembatan tepat sekali dan kembali lagi ke tempat semula maka jumlah jembatan yang menghubungkan setiap daratan harus genap, sedangkan pada permasalahan ini jumlah jembatan yang menghubungkan ke setiap daratan adalah ganjil. (Munir, 2009)

2.2 Definisi dan Konsep Dasar Teori Graph

Teori Graph merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang membahas hubungan antara simpul dan sisi. Graph G bukan merupakan himpunan kosong karena berisi himpunan simpul-simpul yang dihubungkan oleh sisi, yang dinotasikan sebagai $G = \{V, E\}$ dimana 'V' adalah himpunan simpul, $V = (v_1, v_2, v_3)$; dan 'e' adalah himpunan sisi, $E = (e_1, e_2, e_3)$. Sehingga dari notasi tersebut merupakan representasi dari definisi graph, yaitu simpul yang dihubungkan oleh sisi secara berurutan melambangkan simpul, sisi, simpul, sisi,

dst. Dalam terapannya, simpul dapat mewakili sebagai kota, nama, atom, dan masih banyak lagi. Sedangkan sisi sebagai penghubungnya, seperti jalan raya, unsur kimia, rute, dsb. (Siang, 2009)

Sebagaimana permasalahan pada jembatan Konigsberg, maka graph dapat digambarkan sebagai berikut :



Gambar 2.2

Ilustrasi Graph dari Jembatan Konigsberg

Keterangan :

$$V = \{A, B, C, D\}$$

$$E = \{e1, e2, e3, e4, e5, e6, e7\}$$

2.2.1 Sisi Ganda

Pada graph di atas, sisi e3 dan e4 disebut sisi ganda karena dihubungkan oleh 2 simpul yang sama, yaitu simpul A dan B. Sedangkan sisi yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama disebut **Loop**, yang biasanya berbentuk lingkaran.

2.2.2 Order dan Ukuran (Size)

Order adalah jumlah simpul yang terdapat pada suatu graph (anggota V). Sedangkan **Ukuran** adalah banyaknya sisi pada suatu graph (anggota e). Pada contoh graph diatas memiliki order sebanyak 3 dan ukuran sebanyak 7.

2.2.3 Derajat (Degree)

Derajat atau degree adalah banyaknya sisi yang terhubung pada suatu simpul, dilambangkan dengan $d(A)$. Sedangkan derajat graph G adalah jumlah seluruh sisi yang terhubung pada semua simpul pada graph tersebut. (Munir, 2009)

Contoh : $d(A) = 5$; $d(B) = 3$; $d(C) = 3$; $d(D) = 3$

Jumlah derajat graph G adalah 14, sehingga dari sini didapatkan formula untuk menghitung derajat suatu graph, yaitu

$$d(G) = 2n ; \text{ untuk } n \text{ adalah banyaknya ruas garis atau sisi.}$$

2.2.4 Ketetangaan (Adjacency)

Suatu graph dikatakan bertetangga jika dua buah simpul terhubung oleh sebuah garis atau sisi, maka simpul 1 bertetangga dengan simpul 2. Contoh perhatikan graph pada Gambar 2.2:

1. Simpul C memiliki ketetangaan dengan simpul A karena kedua simpul tersebut dihubungkan oleh sisi e_1 dan e_2 ,
2. Simpul B bertetangga dengan simpul D karena dihubungkan oleh sisi e_7 .

3. Simpul B tidak bertetangga dengan simpul C karena tidak ada sisi yang menghubungkan keduanya (Munir,2009:293).

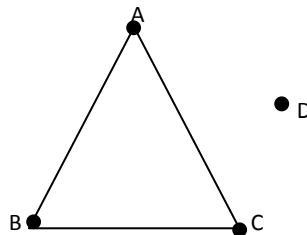
2.2.5 Bersisian (Incidency)

Suatu sisi dikatakan bersisian jika sisi tersebut terhubung oleh 2 buah simpul, maka sisi tersebut bersisian dengan kedua simpul itu. Contoh :

1. Sisi e3 bersisian dengan simpul A dan simpul B, begitu juga dengan sisi e4 bersisian dengan simpul A dan simpul B
2. Sisi e6 bersisian dengan simpul A dan simpul D
3. Sisi e2 tidak bersisian dengan simpul D (Seymor and lipson, 2007)

2.2.6 Simpul Terisolasi

Simpul terisolasi atau terpencil merupakan simpul yang tidak mempunyai ketetanggaan maupun bersisian. Dengan kata lain, tidak ada sisi yang menghubungkan simpul tersebut dengan simpul yang lain. Contoh :



Gambar 2.3

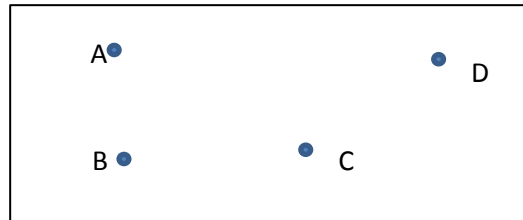
Graph dengan Simpul Terisolasi

Simpul D merupakan simpul yang terisolasi

2.2.7 Graph Kosong

Graph yang himpunan sisinya merupakan himpunan kosong disebut Graph

Kosong. Contoh:



Gambar 2.4

Graph Kosong

Gambar 2.4 merupakan graph kosong karena tidak ada sisi yang menghubungkan setiap simpulnya.

2.3 Macam-Macam Graph

Berdasarkan ada tidaknya gelang atau sisi ganda pada suatu graph, maka secara umum graph digolongkan menjadi dua jenis :

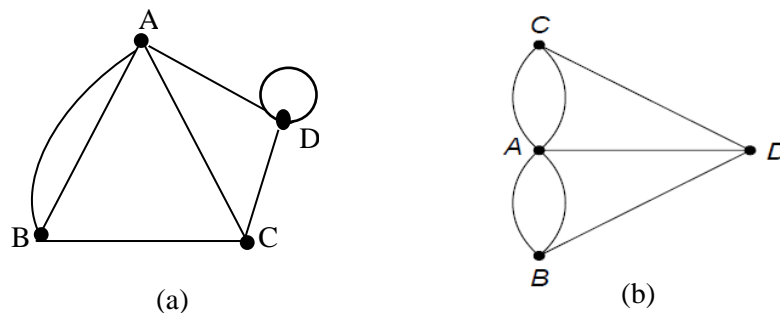
2.3.1 Graph Sederhana

Graph sederhana adalah graph yang tidak memuat gelang atau sisi ganda. Pada Gambar 2.3 merupakan contoh dari graph sederhana. Pada graph sederhana, sisi adalah pasangan tak terurut.

2.3.2 Graph Tak Sederhana

Graph tak sederhana adalah graph yang mengandung gelang atau sisi. Graph tak sederhana juga terbagi menjadi 2 macam, yaitu graph semu dan multigraph. Graph semu adalah graph yang mengandung loop. Sedangkan

Multigraph adalah graph yang memiliki sisi ganda, sehingga memungkinkan suatu simpul dihubungkan oleh dua sisi (Munir,2009). Contoh :



Gambar 2.5

(a) Graph Semu, (b) Graph ganda.

Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka graph digolongkan menjadi 2 macam :

2.3.3 Graph Tak Berarah

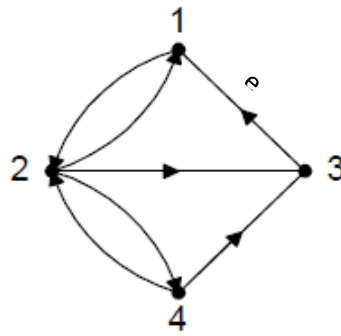
Graph tak berarah tidak mempunyai orientasi arah yang tentu. Pada Gambar 2.5 juga merupakan contoh dari graph tak berarah.

2.3.4 Graph Berarah (Directed Graph)

Dikatakan berarah jika pada graph tersebut memiliki arah yang tentu. Sebuah graph berarah G atau digraph terdiri dari tiga hal :

1. Himpunan V yang unsur-unsurnya disebut simpul.
2. Himpunan T dari pasangan terurut (u, v) dari simpul disebut busur atau sisi yang berarah.
3. u berdekatan dengan v , dan v berdekatan dari u . (Seymor and Lipson, 2007)

Perhatikan gambar graph berarah berikut :



Gambar 2.6

Graph Berarah

Terlihat pada Gambar 2.6 bahwa $e = (3, 1)$ adalah sisi berarah dalam sebuah digraph G. Maka:

1. e berawal pada simpul 3 dan berakhir pada simpul 1
2. Simpul 3 adalah asal atau simpul pangkal e, dan simpul 1 adalah tujuan atau simpul akhir e
3. Simpul 3 adalah pengikut dari simpul 1
4. Simpul 1 disebut *Simpul Terminal*
5. Simpul 3 disebut *Simpul Asal*

Pada graph berarah, (u, v) tidak sama dengan (v, u) sehingga menyatakan dua sisi yang berbeda, seperti yang terlihat pada Gambar 2.6 Graph berarah sering digunakan untuk menggambar peta lalu lintas suatu kota. (Seymour and Lipson, 2007: 201)

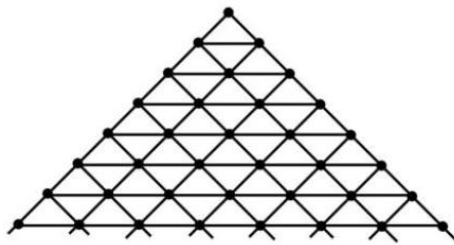
Berdasarkan jumlah simpul pada graph dibedakan menjadi 2 macam :

2.3.5 Graph Hingga

Graph yang memiliki simpul n yang terhingga merupakan suatu graph berhingga. Graph pada gambar-gambar sub bab di atas merupakan contoh dari graph berhingga karena memiliki n buah simpul yang berhingga.

2.3.6 Graph Tak Hingga

Adalah Graph yang memiliki simpul n tak berhingga



Sumber. Seymour and Lipson. Edisi 3. 2007

Gambar 2.7

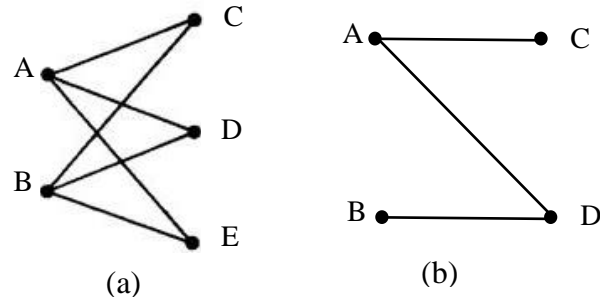
Graph Tak Hingga

pada Gambar 2.7 jelas terlihat bahwa bagian bawah graph merupakan sisi-sisi yang berlanjut dan memungkinkan untuk dilanjutkan menjadi graph yang lebih panjang, sehingga graph tersebut adalah graph yang tak berhingga.

2.4 Graph Bipartit

Suatu graph G disebut graph bipartit apabila $V(G)$ merupakan gabungan dari 2 himpunan tak kosong V_1 dan V_2 dan setiap garis dalam G menghubungkan suatu simpul dalam V_1 dengan simpul dalam V_2 . Apabila dalam graph bipartisi setiap simpul dalam V_1 berhubungan dengan setiap simpul pada V_2 , maka disebut

Graph Bipartisi Lengkap. Jika V_1 terdiri dari m simpul dan V_2 terdiri dari n simpul, maka graph bipartisi lengkap diberi simbol $K_{m,n}$ (Siang,2009:215)



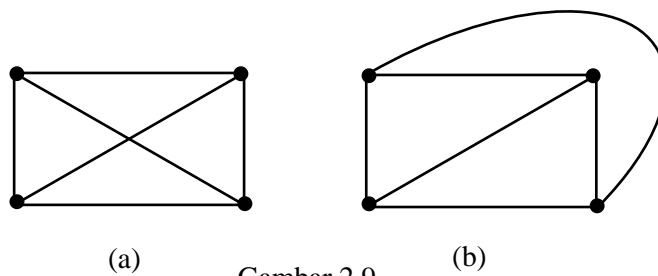
Gambar 2.8

(a) Graph Bipartisi Lengkap, (b) Graph Bipartisi tak Lengkap

Gambar 2.8 (a) merupakan graph bipartisi lengkap karena semua simpul di V_1 (A, B) terhubung dengan semua simpul pada V_2 (C, D, E). Sedangkan pada Gambar 2.8 (b) bukan graph bipartisi lengkap karena ada simpul v_1 tidak terhubung dengan simpul v_4 . Maka pada Gambar 2.8 (a) diberikan simbol $K_{3,2}$.

2.5 Graph Planar

Suatu graph yang dapat digambarkan tanpa adanya ruas yang berpotongan disebut Graph Planar. Graph planar seringkali menipu penglihatan mata, karena biasanya digambarkan dengan ruas yang berpotongan namun sebenarnya dapat digambar tanpa adanya ruas yang berpotongan.



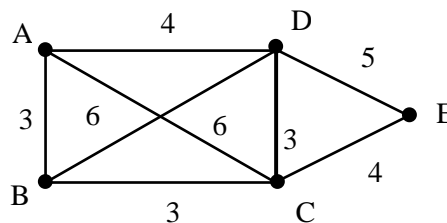
Gambar 2.9

Graph Planar

Pada Gambar 2.9 (a) secara kasat mata graph digambar dengan ruas yang berpotongan, graph tersebut dapat digambarkan kembali tanpa adanya ruas yang berpotongan seperti pada Gambar 2.9 (b). Penggambaran graph planar tanpa adanya ruas yang berpotongan disebut Graph Bidang. Gambar 2.9 (a) adalah graph planar dan Gambar 2.9 (b) adalah graph bidang.

2.6 Graph Berbobot

Graph G disebut graph berbobot jika setiap sisi e dari G diberi besaran atau bobot tertentu, yaitu berupa bilangan non-negatif (Seymour and Lipson, 2007 :162). Bobot pada tiap sisi berbeda-beda bergantung masalah yang dimodelkan. Bobot dapat menyatakan jarak suatu kota, biaya perjalanan, waktu tempuh, dan lain-lain. Contoh :



Gambar 2.10

Graph Berbobot

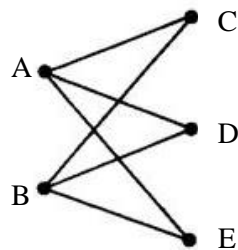
2.7 Representasi Graph Dalam Matriks

Terdapat dua macam penyajian graph dalam matriks :

2.7.1 Adjacency Matriks (Matriks Ketetanggan)

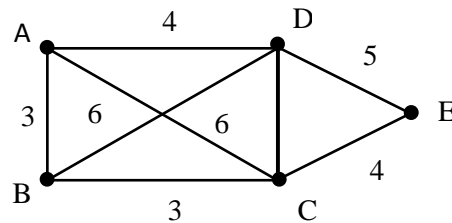
Adjacency Matriks digunakan untuk menyatakan graph dengan cara menyatakannya dalam jumlah garis yang menghubungkan titik-titiknya. Jumlah baris dan kolom matriks sama dengan jumlah titik dalam graph.

Misalkan G adalah graph dengan titik-titik $v_1, v_2, v_3 \dots v_n$ (n berhingga). Adjacency matriks yang sesuai dengan graph G adalah matriks $A = (a_{ij})$ dengan a_{ij} adalah jumlah sisi yang menghubungkan titik v_i dengan titik v_j ($i, j = 1, 2, 3, \dots, n$). Pada graph tak berarah jumlah garis yang menghubungkan titik v_i dengan v_j selalu sama dengan garis yang menghubungkan titik v_j dengan titik v_i sehingga membentuk matriks yang simetris. Contoh perhatikan kembali Gambar 2.8 (a) dan Gambar 2.10 :



Gambar 2.8 (a)

Graph Bipartisi Lengkap



Gambar 2.10

Graph Berbobot

Untuk merubah graph tersebut kedalam matriks, maka tiap-tiap baris dan kolom matriks diberi indeks yang sesuai dengan titik graphnya. Sel pada perpotongan baris dan kolom matriks menyatakan banyaknya garis yang menghubungkan kedua titik tersebut. Sedangkan untuk graph berbobot, Sel pada perpotongan baris dan kolom matriks menyatakan bobot pada sisi graph tersebut.

Matriks dari Gambar 2.8 (a) :

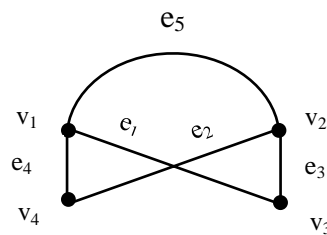
$$\begin{bmatrix} & A & B & C & D & E \\ A & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ B & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ C & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ D & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ E & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks dari Gambar 10 :

$$\begin{bmatrix} & A & B & C & D & E \\ A & 0 & 3 & 6 & 4 & 0 \\ B & 3 & 0 & 3 & 6 & 0 \\ C & 6 & 3 & 0 & 3 & 4 \\ D & 4 & 6 & 3 & 0 & 5 \\ E & 0 & 0 & 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

2.7.2 Incidency Matriks (Matriks Bersisian)

Incidency matriks menyatakan keterhubungan antara simpul dan sisi pada graph. Suatu graph G memiliki n simpul dan m sisi, sehingga matriks $A = a_{ij}$ menyatakan ada tidaknya hubungan antara simpul v_i dan sisi e_j . Incidency matriks berukuran $n \times m$ dengan baris menunjukkan simpul dan kolom menunjukkan sisi. (Siang, 2009)



Gambar 2.11

Graph Sederhana

$$G = \begin{bmatrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ v_1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ v_2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ v_3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ v_4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.8 Pewarnaan Graph

Pewarnaan graph adalah memberi warna pada simpul / sisi / daerah pada suatu graph sedemikian sehingga tidak ada simpul / sisi / daerah yang bertetangga memiliki warna sama. Sebuah graph G adalah satu himpunan $V = V (G)$ dari simpul dan himpunan $E = E (G)$ dari sisi , masing-masing menghubungkan

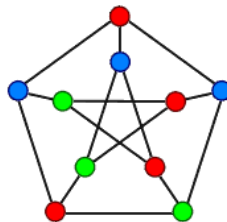
sepasang simpul yang berdekatan. K warna adalah pemberian warna dari G sehingga tidak ada dua simpul yang berdekatan mendapatkan warna yang sama.

Dalam pewarnaan graph tidak hanya sekedar mewarnai titik – titik dengan warna yang berbeda dari warna titik yang bertetangga saja, tetapi juga menginginkan jumlah macam warna yang digunakan seminimum mungkin. Jumlah warna minimum yang dapat digunakan untuk mewarnai titik pada suatu graph G disebut bilangan kromatik graph G, yang dilambangkan dengan $\chi(G)$. Suatu graph G yang mempunyai bilangan kromatik k dilambangkan dengan $\chi(G) = k$ (Suryadi,1994:56).

Terdapat tiga macam pewarnaan graph, yaitu pewarnaan simpul, pewarnaan sisi, dan pewarnaan wilayah.

2.8.1 Pewarnaan Simpul

Pewarnaan titik / simpul adalah memberikan warna pada titik – titik pada graph sedemikian sehingga setiap dua titik yang bertetangga (berhubungan langsung) mempunyai warna yang berbeda. Dua titik yang bertetangga (berhubungan langsung) adalah dua titik yang dihubungkan oleh sebuah sisi. Gambar berikut adalah contoh pewarnaan simpul.



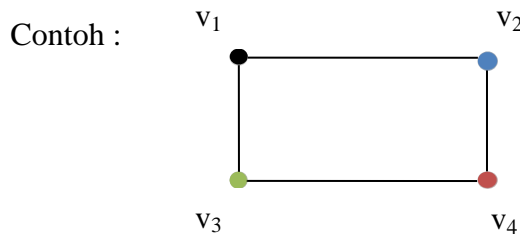
Gambar 2.12
Pewaraan Simpul Graph

Tiga buah warna sudah cukup untuk mewarnai graph tersebut sehingga bilangan kromatiknya adalah tiga, atau dinotasikan $\chi(G) = 3$

Definisi pewarnaan simpul di atas diberikan hanya untuk graf tanpa loop, karena dalam setiap pewarnaan, titik-titik ujung setiap sisi harus mendapat warna berbeda. Demikianlah titik-titik akhir sebuah loop seharusnya mendapat warna yang berbeda dari dirinya sendiri. Boleh juga diasumsikan bahwa tidak terdapat sisi ganda, karena kehadiran satu sisi ganda di antara dua titik membuat titik itu harus mendapat warna berbeda, dan penambahan sisi lain menjadi tidak relevan dengan pewarnaan itu. Karena itu perhatian dibatasi hanya pada graf sederhana.

Adapun sifat-sifat bilangan kromatik pada pewarnaan simpul adalah (Molloy,2002:34):

1. Jika ada sebuah pewarnaan k pada graph G , maka $\chi(G) \leq k$



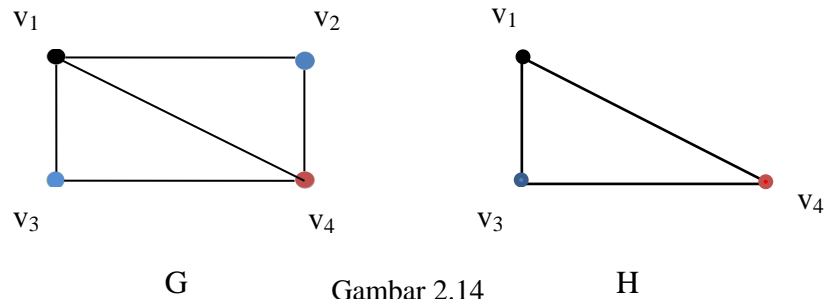
Gambar 2.13

Pewarnaan Graph

Graph pada contoh merupakan graph dengan pewarnaan 4 ($k = 4$) atau $\chi(G) = 4$. Sebenarnya graph tersebut dapat diwarnai dengan menggunakan 2 warna saja. Dengan demikian $\chi(G) = 2$ berarti $\chi(G) \leq k$

2. Jika H adalah graph bagian dari G, maka $\chi(H) \leq \chi(G)$.

Contoh :

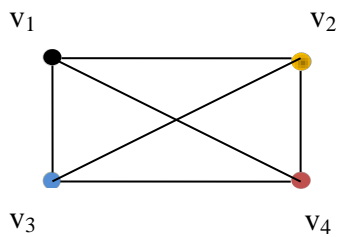


Gambar 2.14
Graph Bagian

Diperoleh $\chi(G) = 3$ dan $\chi(H) = 3$ berarti $\chi(H) \leq \chi(G)$.

3. Graph lengkap K_n memiliki $\chi(G) = n$.

Contoh :



Gambar 2.15

Pewarnaan Graph Lengkap

Graph G merupakan graph lengkap dengan 4 titik sehingga $\chi(G) = 4$

4. $\chi(G) = 1$ jika dan hanya jika G adalah graph kosong.

Contoh :



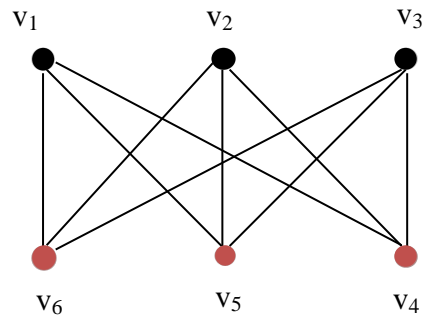
Gambar 2.16

Pewarnaan Graph Kosong

Graph G merupakan graph kosong sehingga $\chi(G) = 1$.

5. Pada graph bipartit berlaku $\chi(G) = 2$

Contoh :



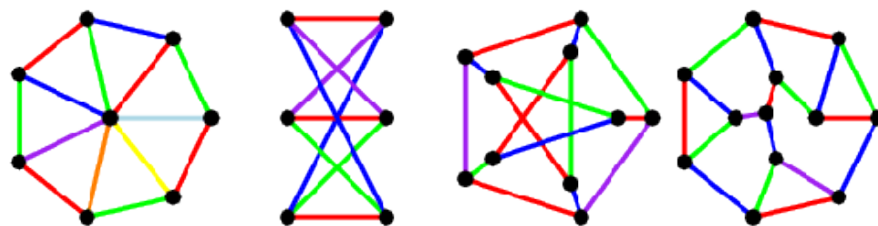
Gambar 2.17

Pewarnaan Graph Bipartit

Graph pada contoh merupakan graph bipartit, maka dapat diwarnai hanya dengan 2 warna, $\chi(G) = 2$

2.8.2 Pewarnaan Sisi

Misalkan G graph tanpa *loop*. Suatu pewarnaan sisi-k untuk graph G adalah penggunaan sebagian atau semua k warna untuk mewarnai semua sisi di G sehingga setiap pasang sisi yang mempunyai titik persekutuan yang sama diberi warna yang berbeda. Jika G mempunyai pewarnaan sisi-k, maka dikatakan sisi-sisi di G diwarnai dengan k warna. Contoh :

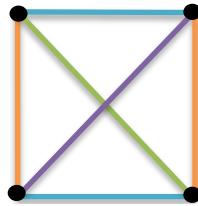


Gambar 2.18

Pewarnaan Sisi

Indeks khromatik graph G adalah Misalkan G sebuah graph. Bilangan yang menyatakan minimum banyaknya warna yang diperlukan untuk mewarnai semua sisi G sedemikian hingga setiap dua sisi G yang terkait ke titik yang sama mendapatkan warna yang berbeda. Indeks khromatik dinyatakan dengan $\chi'(G)$.

(Laili Rizkia; Pewarnaan Graph) Contoh :



Gambar 2.19

Graph dengan Indeks Kromatik

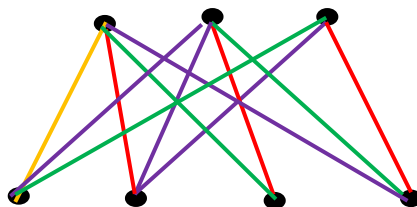
Contoh pada Gambar 2.19 memiliki indeks kromatik = 4 karena minimum banyaknya warna untuk mewarnai semua sisi graph pada Gambar 2.19 adalah 4 ($\chi'(G) = 4$).

Teorema Konig

Jika G merupakan graph bipartit, maka $\chi'(G) = \Delta(G)$.

(Jika G adalah graph bipartit yang memiliki derajat maksimum simpul adalah d, maka $\chi(G)=d$) (Iyandri Tiluk Wahyono; Teorema Konig)

Contoh :



Gambar 2.20

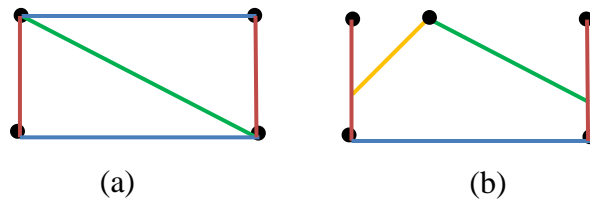
Pewarnan pada Teorema Konig

Graph pada contoh merupakan graph bipartisi dengan derajat tertinggi adalah empat. Berdasarkan teorema konig maka $\chi'(G) = 4$.

Teorema Vizing

Jika G merupakan graph sederhana, maka berlaku $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Contoh :



Gambar 2.21

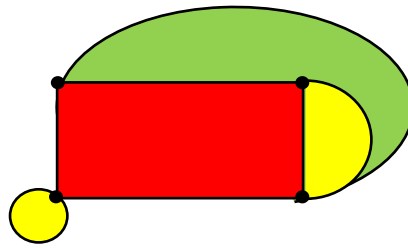
Pewarnaan Teorema Vizing

Gambar 2.21 (a) merupakan graph sederhana dengan derajat tertingginya adalah tiga, sehingga $\chi'(G) = 3$, sedangkan Gambar 2.21 (b) berderajat tertinggi tiga dan membutuhkan empat warna untuk mewarnai semua sisinya.

2.8.3 Pewarnaan Region / Daerah

Pewarnaan region adalah pemberian warna region atau daerah sedemikian sehingga Region/daerah yang berdampingan mempunyai warna yang berbeda. Pewarnaan region biasanya dilakukan pada graph planar karena tidak ada sisi yang saling berpotongan.

Suatu map M berwarna n jika terdapat suatu pewarnaan dari M dengan menggunakan n warna. Untuk mewarnai setiap regionnya maka terlebih dahulu harus ditentukan terdapat berapa region pada graph tersebut. Graph pada Gambar 2.22 memiliki lima region dan tiga warna, dengan pewarnaan setiap regionnya sebagai berikut :



Gambar 2.22
Pewarnaan Region

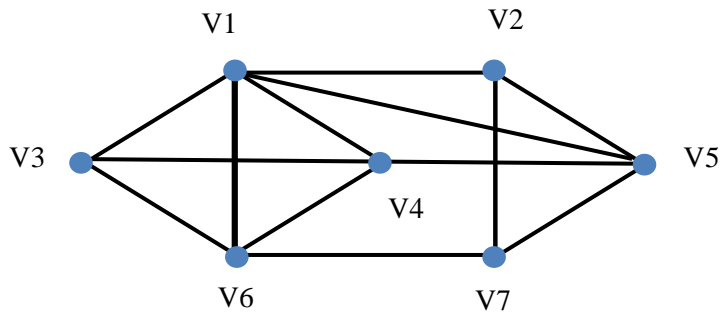
2.9 Algoritma Welch Powell

Algoritma ini memberikan cara mewarnai sebuah graph dengan memberi label titik-titiknya sesuai dengan derajatnya.

1. Urutkan simpul-simpul dari G dalam urutan derajat yang menurun (derajat paling besar terletak pada urutan pertama). Urutan ini memungkinkan beberapa simpul mempunyai derajat yang sama.
 2. Gunakan satu warna tertentu untuk mewarnai simpul pertama. Secara berurut, setiap simpul dalam daftar yang tidak berelasi dengan simpul sebelumnya diwarnai dengan warna ini.
 3. Ulangi langkah 2 di atas untuk simpul dengan urutan tertinggi yang belum diwarnai.
 4. Ulangi langkah 3 di atas sampai semua simpul dalam daftar terwarnai.
- (Seymour and Lipson, 2007)

Contoh penggunaan algoritma welch powell :

Warnailah graph G pada gambar berikut dan tentukan bilangan kromatiknya

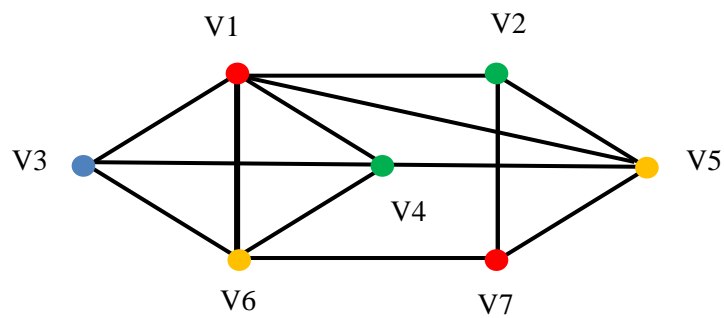


Gambar 2.23

Graph untuk Algoritma Welch Powell

Simpul	V1	V4	V5	V6	V2	V3	V7
Derajat	5	4	4	4	3	3	3
Warna	merah	hijau	kuning	kuning	hijau	biru	merah

Sehingga penampang graph tersebut setelah diwarnai dengan 4 bilangan kromatik, sebagai berikut :



Gambar 2.24

Pewarnaan Graph dengan Algoritma Welch Powell

2.10 Prinsip Pigeon Hole

“Jika n merpati ditempatkan pada m rumah merpati, dimana $n > m$, maka

terdapat rumah merpati yang memuat paling sedikit dua merpati.”

Untuk membuktikan pernyataan prinsip *pigeon hole* bentuk pertama ini, kita gunakan kontradiksi. Misalkan kesimpulan dari pernyataan tersebut salah, sehingga setiap rumah merpati memuat paling banyak satu merpati. Karena ada m rumah merpati, maka paling banyak m merpati yang bisa dimuat. Padahal ada n merpati yang tersedia dan $n > m$, sehingga kita dapatkan sebuah kontradiksi.

Contoh : Seorang ahli pembuat nama di sebuah kota terkadang dimintai tolong untuk memberi nama anak-anak yang lahir. Untuk minggu ini ia menyiapkan nama depan Yoel, Ocep , Frans sebagai nama-nama yang bagus dan nama belakang Krisnanda , Attuh Sanger , Adiguna. Pada minggu tersebut terdapat sebelas orangtua bayi yang meminta nama darinya. Bagaimana menunjukkan bahwa paling sedikit ada dua bayi yang mempunyai nama yang sama dengan asumsi bahwa ahli pembuat nama tersebut selalu memberikan nama depan dan belakang?

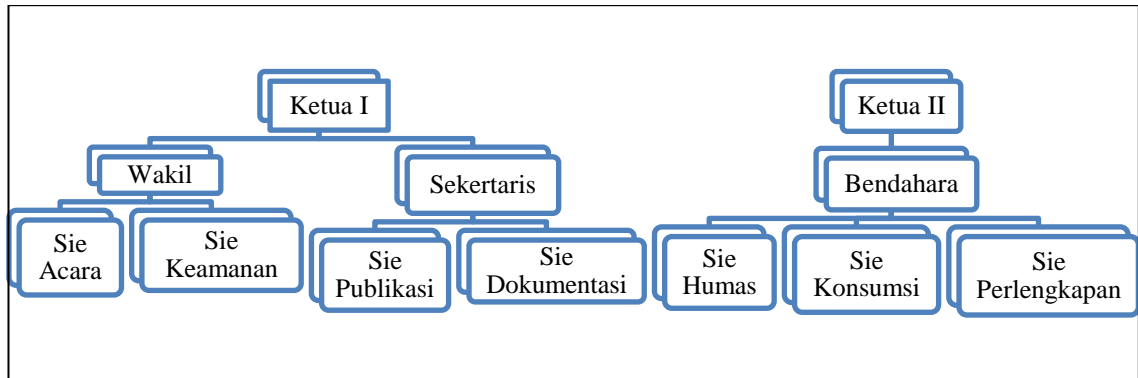
Terdapat Sembilan kombinasi nama depan dan belakang yang mungkin untuk sebelas bayi yang lahir pada bulan tersebut. Kita asumsikan sebelas bayi tersebut dengan merpati dan Sembilan nama sebagai rumah merpati. Berdasarkan prinsip *pigeon hole* terdapat rumah merpati yang memuat paling sedikit dua merpati. Dengan demikian terdapat dua kombinasi nama yang sama yang dipakai paling sedikit digunakan oleh dua bayi. (Yoel Krisnanda Sumitro; Prinsip *Pigeon Hole* dan Aplikasinya)

2.11 Aplikasi Teori Graph

Sebagaimana yang telah dijelaskan pada latar belakang, aplikasi graph sangatlah luas jangkauannya. Graph dapat diaplikasikan dalam berbagai disiplin ilmu, serta disekitar lingkungan kehidupan manusia pun sangat banyak yang menggunakan konsep teori graph. Mulai dari terapan yang paling sederhana, seperti silsilah keluarga, pengelompokan hewan di kebun binatang, penggambaran peta, hingga terapan dalam ilmu pengetahuan dan teknologi, seperti jaringan komputer, unsur senyawa dalam kimia, bidang kelistrikan, dan lain-lain. Graph juga bisa berguna untuk memodelkan sesuatu yang abstrak, seperti pohon keluarga, aliran kerja dalam proyek.

Graph digunakan dalam kehidupan sehari-hari untuk mendeskripsikan model persoalan dan menggambarannya secara konkret dan jelas, mempresentasikan objek-objek abstrak dan hubungan antara objek tersebut. Inti dari cara pengaplikasian graph ini adalah bagaimana kita bisa membaca permasalahan, kemudian mendefinisikan apa yang akan menjadi objek masalah tersebut yang kemudian akan menjadi simpul-simpul dari graph yang akan kita bangun untuk menggambarkan permasalahan yang kita hadapi tadi, apabila telah kita dapatkan simpul simpul maka akan mudah bagi kita untuk membangun graph dengan memberi sisi pada simpul-simpul yang saling berhubungan. Representasi visual dari graph adalah dengan menyatakan objek sebagai noktah, bulatan atau simpul (verteks), sedangkan hubungan antara objek tersebut dinyatakan dengan garis atau sisi (edge). Berikut adalah beberapa contoh aplikasi graph dalam berbagai bidang ilmu :

(1) Struktur Organisasi

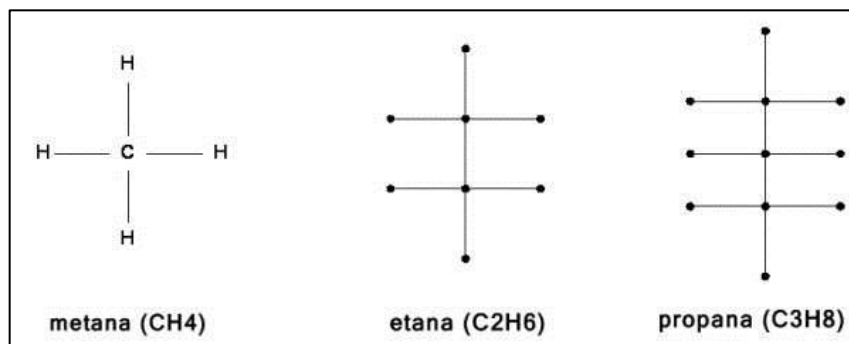


Gambar 2.25

Graph Struktur Organisasi

Dalam graph struktur organisasi menggunakan teori pohon, dimana pada pangkal pohon sebagai ketua, dan cabang dari pohon adalah bawahan dari ketua.

(2) Isomer Senyawa Kimia Karbon



Sumber . Munir. Matematika Diskrit. 2007

Gambar 2.26

Isomer senyawa kimia karbon

Arthur Cayle dalam Rinaldi Munir (2007;360) menggunakan graph dalam memodelkan molekul senyawa untuk menghitung jumlah isomernya. Atom Karbon (C) dan atom hidrogen (H) dinyatakan sebagai simpul, sedangkan ikatan antara atom (C) dan atom (H) dinyatakan sebagai sisi.

2.12 Aplikasi Pewarnaan Graph

Salah satu terapan penting dari pewarnaan graph adalah mewarnai peta. Misalkan kita diminta mewarnai peta yang terdiri dari beberapa wilayah atau daerah, sedemikian sehingga tidak ada wilayah yang bertetangga memiliki warna yang sama. Sebagaimana penampang peta dari gambar berikut merupakan salah satu terapan pewarnaan region / daerah.



Sumber . Munir. Matematika Diskrit. 2007

Gambar 2.27

Pewarnaan Peta

Sedangkan contoh lain dari terapan pewarnaan graph yang sering digunakan adalah pengaturan jadwal. Contoh, Setiap semester petugas kantor akademik harus menentukan jadwal ujian. Hal ini tidaklah mudah, karena beberapa mahasiswa/i mengambil beberapa mata kuliah yang bisa bertabrakan jadwal ujiannya. Petugas tersebut ingin menghindari semua jadwal yang bertabrakan. Tentu saja, ia bisa membuat sebuah jadwal dengan setiap mata kuliah memiliki waktu ujian yang berlainan, tetapi hal ini mengakibatkan masa ujian tersebut akan sangat lama sekali dan bahkan mungkin lebih dari satu semester.

Petugas tersebut tentu saja ingin membuat masa ujian sesingkat mungkin sehingga memudahkan semua pihak.

Untuk masalah penentuan jadwal sebagaimana pada rumusan masalah tersebut biasanya berhubungan dengan beberapa pekerjaan yang berhubungan seperti menggunakan sumber daya yang sama sehingga tidak bisa dilakukan pada waktu yang bersamaan. Kita dapat menyelesaikan masalah ini dalam 3 langkah, yaitu:

(1) Menggambar Simpul-Simpul Graph

Simpul-simpul graph yang digambarkan haruslah mewakili pekerjaan yang akan dilakukan.

(2) Menggambar Sisi-Sisi Pada Graph

Kita menggambarkan sisi-sisi pada setiap pasang simpul yang menggunakan sumber daya yang sama. Yang artinya kedua pekerjaan tersebut tidak bisa dilakukan pada waktu yang sama.

(3) Mewarnai Graph

Langkah terakhir adalah mewarnai simpul-simpul pada graph tersebut dengan warna yang minimum sehingga tidak ada simpul-simpul yang bertetangga memiliki warna yang sama.